

Modyfikatory typów i kwantyfikacja w języku naturalnym

Jakub Szymanik

7 lipca 2007



Spis treści

- 1 Kwantyfikacja kolektywna
 - Wprowadzenie
 - Propozycja Scha & van der Does '80
 - Problemy z tymi modyfikatorami
 - Propozycja Wintera 2001
 - Alternatywna podejście (z J. Kontinen)
- 2 Konstrukcje wzajemne
 - Wprowadzenie
 - Stosowne modyfikatory
 - Złożoność obliczeniowa konstrukcji wzajemnych

Spis treści

- 1 Kwantyfikacja kolektywna
 - Wprowadzenie
 - Propozycja Scha & van der Does '80
 - Problemy z tymi modyfikatorami
 - Propozycja Wintera 2001
 - Alternatywna podejście (z J. Kontinen)
- 2 Konstrukcje wzajemne
 - Wprowadzenie
 - Stosowne modyfikatory
 - Złożoność obliczeniowa konstrukcji wzajemnych

Spis treści

1 Kwantyfikacja kolektywna

● Wprowadzenie

- Propozycja Scha & van der Does '80
- Problemy z tymi modyfikatorami
- Propozycja Wintera 2001
- Alternatywna podejście (z J. Kontinen)

2 Konstrukcje wzajemne

- Wprowadzenie
- Stosowne modyfikatory
- Złożoność obliczeniowa konstrukcji wzajemnych

Punkt wyjścia

Obserwacja

- Kwantyfikacja po przedmiotach a kolekcjach (B. Russel).
- Kolekcje nie są redukowalne do indywidualów.
- Kwantyfikacja kolektywna to pojęcie semantyczne.

Przykłady

- (1.) Tikitū i Samson podnieśli razem stół.
- (2.) Talie kart na stole są różnego koloru.
- (3.) Nina i Jon mieli razem kolor, lecz osobno tylko po parze.
- (4.) Większość doktorantów gra w Texas Hold'em.

Główne pytanie?

Jak semantycznie modelować kwantyfikację kolektywną?

Szeroko podzielane intuicje:

- Każda kolekcja jest ufundowana na swoich indywidualach.
- Kolekcje można łączyć w nowe kolekcje.
- Indywidua to jednoelementowe kolekcje.

Potencjalny problem

- (1.) Wszyscy studenci są szczęśliwi.
- (1'.) Wszyscy bogaci studenci są szczęśliwi.

- (2.) Wszyscy studenci podnieśli razem stół.
- (3.) Wszyscy bogaci studenci podnieśli stół.

Spis treści

- 1 **Kwantyfikacja kolektywna**
 - Wprowadzenie
 - **Propozycja Scha & van der Does '80**
 - Problemy z tymi modyfikatorami
 - Propozycja Wintera 2001
 - Alternatywna podejście (z J. Kontinen)
- 2 **Konstrukcje wzajemne**
 - Wprowadzenie
 - Stosowne modyfikatory
 - Złożoność obliczeniowa konstrukcji wzajemnych

Gdzieś w tle teoria typów

Definicja

Zbiór typów to najmniejszy zbiór zawierający:

- 1 e (indywidua) oraz t (wartości logiczne)
- 2 $\alpha\beta$ (typy złożone, funkcje z α na β).

Przykład

rodzaj wyrażenia	przykład	typ
zdanie	On je.	t
nazwa własna	Szrenica	e
rzeczownik	pies	et
kw. dystrybutywny	większość	$((et)((et)t))$
kw. kolektywna	większość	$((et)((((et)t)t))$

Główna idea S&D

... Partee&Rooth 1983, van Benthem 1991 ...
„type-shifting principles”

kwantyfikacja dystrybutywna \rightsquigarrow kwantyfikacja kolektywna
 $((et)((et)t)) \rightsquigarrow ((et)((et)t)t)$

Ilustracja

- (1.) Pięć osób podniosło stół.
- (2.) $\exists^{=5}x[\text{Człowiek}(x) \wedge \text{Podniósł}(x)]$.
- (3.) $\exists X[\text{card}(X) = 5 \wedge X \subseteq \text{Ludzie} \wedge \text{Podniósł}(X)]$.

Inne przykłady

- (1.) Niektórzy studenci grali razem w pokera.
- (2.) $\exists X[X \subseteq \text{Studenci} \wedge \text{Grali}(X)]$.
- (3.) Wszystkie kombinacje kart przegrywają.
- (4.) $\forall X[X \subseteq \text{Karty} \Rightarrow \text{Przegrywa}(X)]$.

Modyfikator egzystencjalny

Definicja

Ustalmy uniwersum U oraz wybierzmy $X \subseteq U$ i $Y \subseteq \mathcal{P}(U)$.
Definiujemy modyfikator egzystencjalny Q^{EM} dla kwantyfikatora Q w następujący sposób:

$$Q^{\text{EM}}(X, Y) \iff \exists Z \subseteq X [Q(X, Z) \wedge Z \in Y].$$

Modyfikator neutralny

Definicja

Ustalmy uniwersum U oraz wybierzmy $X \subseteq U$ i $Y \subseteq \mathcal{P}(U)$.
Definiujemy modyfikator egzystencjalny Q^N dla kwantyfikatora Q w następujący sposób:

$$Q^N(X, Y) \iff Q(\bigcup(Y \cap \mathcal{P}(X))).$$

Przykład zastosowania

- (1.) Dokładnie pięciu studentów grało razem w pokera.
- (2.) $\exists X \subseteq \text{Studenci} \cap \text{Pokerzyści}(\text{card}(X) = 5)$.

Spis treści

- 1 **Kwantyfikacja kolektywna**
 - Wprowadzenie
 - Propozycja Scha & van der Does '80
 - **Problemy z tymi modyfikatorami**
 - Propozycja Wintera 2001
 - Alternatywna podejście (z J. Kontinen)
- 2 **Konstrukcje wzajemne**
 - Wprowadzenie
 - Stosowne modyfikatory
 - Złożoność obliczeniowa konstrukcji wzajemnych

Problem van Benthema

(1.) No students met yesterday at the coffee shop.

$$\text{NO}^{\text{EM}}(\text{Student}, \text{Meet}) \iff \emptyset \in \text{Meet}.$$

(2.) Less than five students smiled.

$$\exists^{<5} \text{EM}(\text{Student}, \text{Smile})$$

$$\iff$$

$$\exists X (X \subseteq \text{Smile} \wedge X \subseteq \text{Student} \wedge \text{card}(X) < 5).$$

Inny przykład

(1.) Exactly 5 students drank a whole glass of beer together.

$$\exists =^5 \text{EM} (\text{Student}, \text{Drink})$$



$$\exists A \subseteq \text{Student} [\text{card}(A) = 5 \wedge \text{Drink}(A)].$$

Inna interpretacja

(1.) Exactly 5 students drank a whole glass of beer together.

$$\exists = 5^N (\text{Student}, \text{Drink})$$



$$\text{card}(\{x : \exists A \subseteq \text{Student}[x \in A \wedge \text{Drink}(A)]\}) = 5.$$

Spis treści

- 1 Kwantyfikacja kolektywna**
 - Wprowadzenie
 - Propozycja Scha & van der Does '80
 - Problemy z tymi modyfikatorami
 - **Propozycja Wintera 2001**
 - Alternatywna podejście (z J. Kontinen)
- 2 Konstrukcje wzajemne**
 - Wprowadzenie
 - Stosowne modyfikatory
 - Złożoność obliczeniowa konstrukcji wzajemnych

Operator „determiners fitting”

Definicja

Ustalmy uniwersum U dla każdego $X, Y \subseteq \mathcal{P}(U)$ definiujemy:

$$Q^{\text{dfit}}(X, Y)$$

$$\iff$$

$$Q[\cup X, \cup(X \cap Y)] \wedge [X \cap Y = \emptyset \vee \exists W \in X \cap Y \wedge Q(\cup X, W)].$$

Przykład zastosowania

(1.) Exactly 5 students drank a whole glass of beer together.

$$\exists^{=5\text{dfit}}(\text{Student}, \text{Drink})$$



$$\text{card}(\{x \in A : A \subseteq \text{Student} \wedge \text{Drink}(A)\}) = 5 \wedge \\ \wedge \exists W \subseteq \text{Student}[\text{Drink}(W) \wedge \text{card}(W) = 5].$$

Spis treści

- 1 Kwantyfikacja kolektywna
 - Wprowadzenie
 - Propozycja Scha & van der Does '80
 - Problemy z tymi modyfikatorami
 - Propozycja Wintera 2001
 - Alternatywna podejście (z J. Kontinen)
- 2 Konstrukcje wzajemne
 - Wprowadzenie
 - Stosowne modyfikatory
 - Złożoność obliczeniowa konstrukcji wzajemnych

Główna idea

Dodajemy kwantyfikatory uogólnione drugiego rzędu.

$$\exists^2 = \{(M, P) \mid P \subseteq \mathcal{P}(M) \text{ and } P \neq \emptyset\}.$$

$$\text{Even} = \{(M, P) \mid P \subseteq \mathcal{P}(M) \text{ and } \text{card}(P) \text{ is even}\}.$$

$$\text{Even}' = \{(M, P) \mid P \subseteq \mathcal{P}(M) \text{ and } \forall X \in P(\text{card}(X) \text{ is even})\}.$$

$$\text{Most}^2 = \{(M, P, S) \mid P, S \subseteq \mathcal{P}(M) \text{ and } \text{card}(P \cap S) > \text{card}(P \setminus S)\}$$

Zastosowanie

(1.) Niektórzy studenci zebrali się.

Przykład

Określamy kwantyfikator Some^t następująco:

$$\{(M, P, G) \mid P \subseteq M; G \subseteq \mathcal{P}(M) : \exists Y \subseteq P (Y \neq \emptyset \text{ oraz } P \in G)\}.$$

$$\text{Some}^t x, X[\text{Student}(x), \text{Zebranie}(X)].$$

Inny przykład

(1.) Pięciu ludzi podniosło stół.

Przykład

Niech Five^t denotuje klasę

$$\{(M, P, G) \mid P \subseteq M; G \subseteq \mathcal{P}(M) : \exists Y \subseteq P(\text{card}(Y) = 5 \wedge P \in G)\}.$$
$$\text{Five}^t x, X[\text{Ludzie}(x), \text{Podnieśli}(X)].$$

Jeszcze jeden przykład

(1.) Większość studentów nigdy nie grała w pokera.

Most² $X, Y[\text{Student}(X), \neg\text{Grali}(Y)]$.

Mała obserwacja

Stwierdzenie

Niech Q będzie kwantyfikatorem uogólnionym definiowalnym w SO. Wówczas Q^{EM} , Q^{dfit} oraz Q^t są definiowalne w SO.

Szkic dowodu

Rozważmy przypadek Q^{EM} . Niech $\psi(x)$ oraz $\phi(Y)$ będą formułami. Chcemy wyrazić $Q^{EM} x, Y(\psi(x), \phi(Y))$ w SO. Z założenia Q można zdefiniować zdaniem $\theta \in SO\{\{P_1, P_2\}\}$. Wówczas następująca formuła definiuje Q^{EM} :

$$\exists Z(\forall x(Z(x) \rightarrow \psi(x)) \wedge (\theta(P_1/\psi(x), P_2/Z) \wedge \phi(Y/Z))).$$

Co to nam daje?

Dziedziczymy problemy, lecz **zwiększamy moc wyrażania?**

Obserwacja

Jeśli Most^2 jest definiowalny w SO, to $\text{CH} = \text{PH}$.

Szkic dowodu

Toda: $\text{PH} \subseteq \text{C}_2P$.

Kontinen, Niemistö: $\text{FO}(\text{Most}^2)$ definiuje problemy dla każdego poziomu CH.

Jeśli Most^2 jest definiowalne w SO, to $\text{FO}(\text{Most}^2) \leq \text{SO}$. Zatem $\text{CH} = \text{PH}$ i więcej $\text{CH} \subseteq \text{PH} \subseteq \text{C}_2P$.

Counting hierarchy

- 1 $C_0P = \text{PTIME}$,
- 2 $C_{k+1}P = \text{PP}^{C_kP}$,
- 3 $\text{CH} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_kP$.

Spis treści

- 1 Kwantyfikacja kolektywna
 - Wprowadzenie
 - Propozycja Scha & van der Does '80
 - Problemy z tymi modyfikatorami
 - Propozycja Wintera 2001
 - Alternatywna podejście (z J. Kontinen)
- 2 Konstrukcje wzajemne
 - Wprowadzenie
 - Stosowne modyfikatory
 - Złożoność obliczeniowa konstrukcji wzajemnych

Spis treści

- 1 Kwantyfikacja kolektywna
 - Wprowadzenie
 - Propozycja Scha & van der Does '80
 - Problemy z tymi modyfikatorami
 - Propozycja Wintera 2001
 - Alternatywna podejście (z J. Kontinen)
- 2 Konstrukcje wzajemne
 - Wprowadzenie
 - Stosowne modyfikatory
 - Złożoność obliczeniowa konstrukcji wzajemnych

Nawiązanie do tezy Hintikki

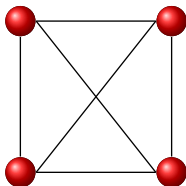
- (1.) Some relative of each villager and some relative of each townsman hate **each other**.
- (2.) Most dots and most stars are connected by lines with **each other**.
- (2'.) Most dots and most stars are connected by lines.
- (2'').) Most dots are connected by lines with most stars.

Reciprocal expressions

- (1.) Andi, Jarmo and Jakub laughed at **one another**.
- (2.) 15 men are hitting **one another**.
- (3.) All members of the parliament refer to **each other** indirectly.
- (4.) Most Boston pitchers sat alongside **each other**.
- (5.) Some Pirates were staring at **each other** in surprise.

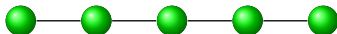
Strong reading

(3.) All members of the parliament refer to each other indirectly.



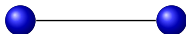
Intermediate reading

(4.) Most Boston pitchers sat alongside each other.



Weak reading

(5.) Some Pirates were staring at each other in surprise.



Inne możliwe odczytania — przykład

(1.) Stones are arranged on top of each other.

Intermediate alternative reciprocity.

Strong Meaning Hypothesis

Hipoteza

W każdym kontekście zdania z „each other”
przyjmują najmocniejsze możliwe odczytanie.

Dalrymple, Kanazawa, Kim, Mchombo, Peters 1998.

Spis treści

- 1 **Kwantyfikacja kolektywna**
 - Wprowadzenie
 - Propozycja Scha & van der Does '80
 - Problemy z tymi modyfikatorami
 - Propozycja Wintera 2001
 - Alternatywna podejście (z J. Kontinen)
- 2 **Konstrukcje wzajemne**
 - Wprowadzenie
 - **Stosowne modyfikatory**
 - Złożoność obliczeniowa konstrukcji wzajemnych

Modyfikatory dla kwantyfikatorów rosnących

Definicja

$$\text{Ram}_S(Q)(A, R) \iff \exists X \subseteq A [Q(X) \wedge \forall x, y \in X (x \neq y \Rightarrow R(x, y))].$$

Definicja

$$\text{Ram}_I(Q)(A, R) \iff \exists X \subseteq A [Q(X) \wedge \forall x, y \in X (x \neq y \Rightarrow \exists z_1, \dots, z_l \in X (z_1 = x \wedge R(z_1, z_2) \wedge \dots \wedge R(z_{l-1}, z_l) \wedge z_l = y))].$$

Definicja

$$\text{Ram}_W(Q)(A, R) \iff \exists X \subseteq A [Q(X) \wedge \forall x \in X \exists y \in X (x \neq y \wedge R(x, y))].$$

3. All members of the parliament refer to each other indirectly.

$Ram_S(\text{All})(\text{MP}, \text{Refer})$.

4. Most Boston pitchers sat alongside each other.

$Ram_I(\text{Most})(\text{Pitcher}, \text{Sit})$.

5. Some pirates of the Carribean were staring at each other.

$Ram_W(\text{Some})(\text{Pirate}, \text{Staring})$.

Ale co z kwantyfikatorami malejącymi

- (1.) Few members of the parliament refer to each other.
- (2.) At most five Boston pitchers sat alongside each other.
- (3.) Less than 8 Pirates were staring at each other in surprise.

Operator „determiners fitting”

Definicja

Ustalmy uniwersum U dla każdego $X, Y \subseteq \mathcal{P}(U)$ definiujemy:

$$Q^{\text{dfit}}(X, Y)$$

$$\iff$$

$$Q[\cup X, \cup(X \cap Y)] \wedge [X \cap Y = \emptyset \vee \exists W \in X \cap Y \wedge Q(\cup X, W)].$$

Operator „bounded composition”

Definicja

Ustalmy uniwersum U oraz wybierzmy $A \subseteq U$ i $B \subseteq \mathcal{P}(U)$.
Definiujemy modyfikator egzystencjalny Q^{BC} dla kwantyfikatora Q w następujący sposób:

$$Q^{BC}(A, B) \iff \forall Y \in \mathcal{P}(A) \cap B \exists X \in \mathcal{P}(A) \cap B$$

$$[\text{card}(X) \geq \text{card}(Y) \wedge \text{card}(A - X) \leq \text{card}(A - Y) \wedge Q AX] \wedge \\ \wedge \exists X \in \mathcal{P}(A) \cap B [Q AX \vee Q A\emptyset].$$

Zastosowanie

(2.) At most five Boston pitchers sat alongside each other.

$$\begin{aligned}
 & \text{Ram}_1(\exists^{\leq 5 \text{BC}})(\text{Pitcher}, \text{Sit}) \\
 & \iff \\
 & \exists W \subseteq \text{Pitchers}(\text{Sat}(W) \wedge \text{card}(W) \leq 5) \wedge \\
 & \wedge \neg \exists Z \subseteq \text{Pitchers}(\text{Sit}(Z) \wedge \text{card}(Z) > 5) \wedge \\
 & \quad \wedge \forall x, y \in Z(x \neq y \Rightarrow \exists z_1, \dots, z_l \in Z \\
 & \quad (z_1 = x \wedge \text{Sit}(z_1, z_2) \wedge \dots \wedge \text{Sit}(z_{l-1}, z_l) \wedge z_l = y)].
 \end{aligned}$$



Spis treści

- 1 Kwantyfikacja kolektywna
 - Wprowadzenie
 - Propozycja Scha & van der Does '80
 - Problemy z tymi modyfikatorami
 - Propozycja Wintera 2001
 - Alternatywna podejście (z J. Kontinen)
- 2 Konstrukcje wzajemne
 - Wprowadzenie
 - Stosowne modyfikatory
 - Złożoność obliczeniowa konstrukcji wzajemnych

Mocna interpretacja bywa NP-zupełna

Definicja

$M \models \text{Ram}_S(Q)(A, R)$ wtw, gdy istnieje pełny ze względu na R podgraf $P \subseteq |M|$ taki, że $Q(P)$.

Obserwacja

Dla niektórych Q kwantyfikator $\text{Ram}_S(Q)$ jest NP-zupełny.
Na przykład, dla $\exists^{\geq k}$, Most, ...

Trudne zdania z konstrukcjami wzajemnymi

- (1.) Most members of the parliament refer to each other indirectly.
- (2.) At least one third of the members of the parliament refer to each other indirectly.
- (3.) At least q of the members of the parliament refer to each other indirectly.

Problem

Pytanie

Dla jakich Q kwantyfikator $\text{Ram}_S(Q)$ jest NP-zupełny?

Hipoteza

Niech $f : \omega \rightarrow \omega$. Definiujemy

$$(Q_f)_M[X] \iff \text{card}(X) \geq f(\text{card}(|M|)).$$

Definicja

Powiemy, że Q_f jest nieograniczony, jeśli

$$\forall m \exists n (m \leq f(n) \leq n - m).$$

Hipoteza

$\text{Ram}_S(Q_f)$ jest NP-zupełny, jeśli Q_f jest nieograniczony.

Analogicznie definiujemy

Definicja

$M \models \text{Ram}_I(Q)(A, R)$ wtw istnieje spójny ze względu na R podgraf $P \subseteq |M|$ taki, że $Q(P)$.

Definicja

$M \models \text{Ram}_W(Q)(A, R)$ wtw istnieje podgraf $P \subseteq |M|$ taki, że $Q(P)$ oraz P nie ma izolowanych wierzchołków.

Słaba i pośrednia interpretacja jest łatwa

Stwierdzenie

Niech Q będzie w P wtedy również $\text{Ram}_1(Q)$ jest w P .

Szkic dowodu

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem, aby sprawdzić czy $G \in Q$ należy wypisać wszystkie maksymalne spójne podgrafy G . Ich liczba jest ograniczona z góry przez $\text{card}(V)$. Teraz wystarczy sprawdzić czy dla któregoś z wypisanych podgrafów C zachodzi $Q(C)$.

Stwierdzenie

Niech Q będzie w P wtedy również $\text{Ram}_1(Q)$ jest w P .

Jak to się ma do SMH?

$$\text{Ram}_S(Q) \rightarrow \text{Ram}_I(Q) \rightarrow \text{Ram}_W(Q)$$

Obserwacja

Nie radzimy sobie z mocną interpretacją.
Szukamy łatwiejszej możliwej interpretacji.